

- تعاريف :

اذا كان f مورفيزم بوليايني من A في B فإننا نعرف :

- المونومورفيزم البولياني بأنه مورفيزم بولياني متباين .
- إبيمورفيزم البولياني بأنه مورفيزم بولياني غامر .
- إندومورفيزم البولياني بأنه مورفيزم بولياني ومنه $A = B$.
- أوتومورفيزم البولياني بأنه اندومورفيزم وتقابل .

- تركيب المورفيزمات :

لتكن A, B, C ثلاثة حلقات بوليانية ولتكن لدينا المورفيزمات :

$f : A \longrightarrow B \quad , \quad g : B \longrightarrow C$

- ملاحظة :

- التطبيق $g \circ f$ يكون مورفيزم بولياني من A في C .
- اذا كان كل من f و g مونومورفيزم (إبيمورفيزم ، إيزومورفيزم) فإن $g \circ f$ يكون أيضاً .
- البرهان : بسيط .

(مبرهنة) - ملاحظة : اذا كان f إيزومورفيزم بولياني من A على B فإن التطبيق العكسي f^{-1} يكون إيزومورفيزم بولياني من B على A .

- البرهان : ليكن $x_1, y_1 \in B$ $\overset{\text{f إيزومورفيزم}}{\Longleftarrow}$ يوجد $x, y \in A$ بحيث يكون : $x_1 = f(x)$ --- $y_1 = f(y)$

ومنه $x = f^{-1}(x_1)$, $y = f^{-1}(y_1)$

$$x_1 y_1 = f(x).f(y) \overset{\text{f مورفيزم}}{=} f(xy) \Rightarrow xy = f^{-1}(x_1 y_1)$$

$$\overset{\text{f مورفيزم بولياني}}{\Rightarrow} f^{-1}(x_1) f^{-1}(y_1) = f^{-1}(x_1 y_1)$$

$$x_1 = f(x) \overset{\text{جبر بولياني}}{\Rightarrow} x_1' = (f(x))' = f(x') \Rightarrow x' = f^{-1}(x_1')$$

$$\Rightarrow (f^{-1}(x_1))' = f^{-1}(x_1')$$

أي أن f^{-1} مورفيزم بولياني ، وبما أنه تقابل (فرضاً) إذاً هو إيزومورفيزم بولياني .

- المورفيزمات والحلقات الجزئية :

ليكن f مورفيزم بولياني من A في B ولتكن A_1 حلقة بوليانية جزئية من A و B_1 حلقة بوليانية جزئية من B .

- مبرهنة :

- $f(A_1)$ حلقة بوليانية جزئية من B .

الموضوع .... التاريخ ⬭⬭ ٢٠١

- $f^{-1}(B_1)$ حلقة بوليانية جزئية من A.

- البرهان:

[1] $f(A_1)\neq\phi$ لأنها تحوي على الأقل العنصرين $f(0)$، $f(1)$، إذا كان $x_1, y_1 \in f(A_1)$ ⇐ يوجد عنصران $x, y \in A_1$ بحيث يكون $f(x) = x_1$ و $f(y) = y_1$

$x_1 y_1 = f(x).f(y) \overset{\text{مورفيزم بولياني}}{=} f(xy) \in f(A_1)$ لأن ($xy \in A_1$ لأن) وذلك لأن A_1 حلقة بوليانية جزئية.

المتمم $x_1' = (f(x))' \overset{\text{مورفيزم بولياني}}{=} f(x') \in f(A_1)$ ($x' \in A_1$ لأن)

$\in A_1$ لأن A_1 حلقة بوليانية جزئية

ومنه نستنتج أن $f(A_1)$ حلقة بوليانية جزئية من B.

[2] $f^{-1}(B_1)\neq\phi$ لأنها تحوي على الأقل 0 و 1، ليكن $x, y \in f^{-1}(B_1)$ ⇐ $f(x), f(y) \in B_1$ ⇐

⇐ $f(x)f(y) \in B_1$ ⇐ $f(xy) \in B_1$ ⇐ $xy \in f^{-1}(B_1)$

المتمم: ليكن $x \in f^{-1}(B_1)$ ⇐ $f(x) \in B_1$ $\overset{\text{حلقة بوليانية جزئية}}{\Rightarrow}$ $(f(x))' \in B_1$ $\overset{\text{مورفيزم بولياني}}{\Rightarrow}$ $f(x') \in B_1$

⇐ $x' \in f^{-1}(B_1)$

ومنه نستنتج أن $f^{-1}(B_1)$ حلقة بوليانية جزئية من A.

- المورفيزم البولياني ومورفيزم الشبكة:

إن المورفيزم البولياني f من A إلى B يحقق ما يلي:

$f(x\vee y) = f(x)\vee f(y)$ و $f(x\wedge y) = f(x)\wedge f(y)$

فهو أيضاً مورفيزم الشبكة وبالأحرى فهو تطبيق متزايد، بينما مورفيزم الشبكة بين جبرين بوليانيين ليس بالضرورة مورفيزم بولياني (حتى لو كان يحافظ على 0 و 1 أي أن $f(1)=1$)،

مثال: ليكن $f: \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ معرف بالشكل: $f(X) = X\cup X_0$

حيث X_0 مجموعة جزئية غير خالية وثابتة.

- $\forall X, Y \in \mathcal{P}(E)$; $f(X\cup Y) = X\cup Y\cup X_0$

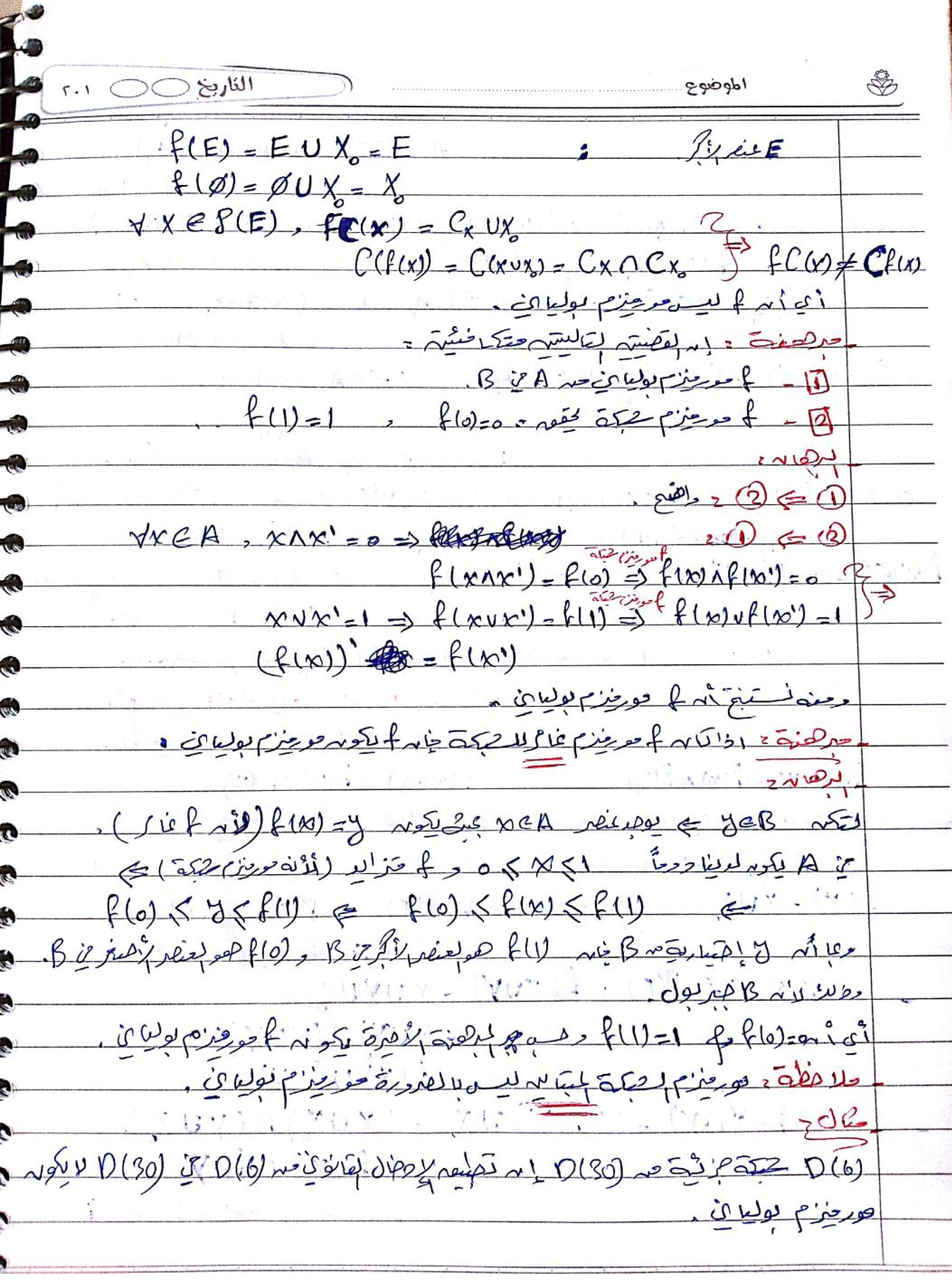
$= (X\cup X_0)\cup(Y\cup X_0)$

$= f(X)\cup f(Y)$

- $f(X\cap Y) = (X\cap Y)\cup X_0 = (X\cup X_0)\cap(Y\cup X_0)$

$= f(X)\cap f(Y)$

أي أن f هو مورفيزم شبكة.



E عنصر أكبر : $f(E) = E \cup X_0 = E$

$f(\emptyset) = \emptyset \cup X_0 = X_0$

$\forall X \in \mathcal{P}(E) , \; fC(X) = C_X \cup X_0$

$C(f(X)) = C(X \cup X_0) = C_X \cap C_{X_0}$ $\Big\} \Rightarrow fC(X) \neq Cf(X)$

أي أن f ليس مورفيزم بولياني.

- مبرهنة : إن القضيتين التاليتين متكافئتين :

1 - f مورفيزم بولياني من A في B.

2 - f مورفيزم شبكة يحقق : $f(0)=0$ ، $f(1)=1$.

- البرهان :

(1) ⟸ (2) : واضح .

(2) ⟸ (1) :

$\forall x \in A \; , \; x \wedge x' = 0 \Rightarrow$

$f(x \wedge x') = f(0) \Rightarrow f(x) \wedge f(x') = 0$ (f مورفيزم شبكة)

$x \vee x' = 1 \Rightarrow f(x \vee x') = f(1) \Rightarrow f(x) \vee f(x') = 1$ (f مورفيزم شبكة) $\Big\} \Rightarrow$

$(f(x))' = f(x')$

ومنه نستنتج أن f مورفيزم بولياني.

- مبرهنة : إذا كان f مورفيزم غامر للشبكة فإن f يكون مورفيزم بولياني.

- البرهان :

لتكن $y \in B$ ⟸ يوجد عنصر $x \in A$ بحيث يكون $f(x) = y$ (لأن f غامر)،

في A يكون لدينا دوماً $0 \leq x \leq 1$ و f متزايد (لأنه مورفيزم شبكة) ⟸

⟸ $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$ ⟸ $f(0) \leq y \leq f(1)$

وبما أن y اختيارية من B فإن $f(1)$ هو العنصر الأكبر في B، و $f(0)$ هو العنصر الأصغر في B.

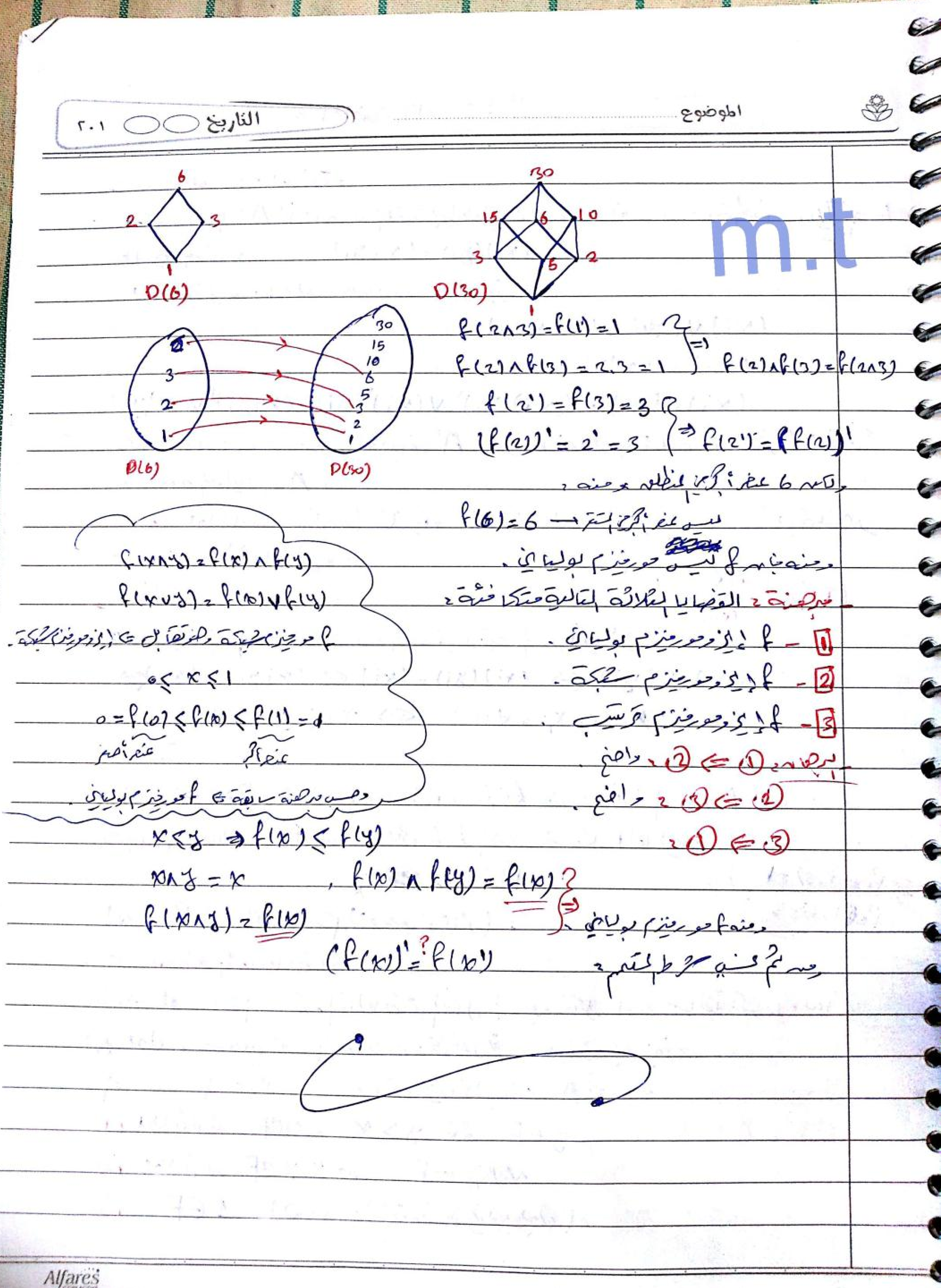
وذلك لأن B جبر بول.

أي أن $f(0)=0$ و $f(1)=1$ وحسب المبرهنة الأخيرة يكون f مورفيزم بولياني.

- ملاحظة : مورفيزم الشبكة الجبرية ليس بالضرورة مورفيزم بولياني.

مثال :

$D(6)$ شبكة جزئية من $D(30)$ إن تطبيق الإدخال القانوني من $D(6)$ في $D(30)$ لا يكون مورفيزم بولياني.


التاريخ ٢٠١
الموضوع
6
2
3
1
D(6)
30
15
6
10
3
5
2
1
D(30)
30
15
10
6
5
3
2
1
D(6)
D(30)
f(2∧3) = f(1) = 1
f(2) ∧ f(3) = 2.3 = 1
f(2) ∧ f(3) = f(2∧3)
f(2') = f(3) = 3
(f(2))' = 2' = 3
⇒ f(2') = (f(2))'
f(6) = 6
f(x∧y) = f(x) ∧ f(y)
f(x∨y) = f(x) ∨ f(y)
0 ≤ x ≤ 1
0 = f(0) ≤ f(x) ≤ f(1) = 1
x ≤ y ⇒ f(x) ≤ f(y)
x∧y = x , f(x) ∧ f(y) = f(x)
f(x∧y) = f(x)
(f(x))' =? f(x')
m.t
Alfares